Gleichungen - Aufgabenstellung und Lösungsstrategien

Franz Pauer

Institut für Mathematik, Universität Innsbruck,
Technikerstr. 25, A-6020 Innsbruck, Österreich.
Franz.Pauer@uibk.ac.at

18. Juli 2006

1 Einleitung

Im Mathematikunterricht wird ausgehend von der Umgangssprache eine Fachsprache entwickelt. Um das *einfach und verständlich* zu tun, muss dabei mit Begriffen sparsam umgegangen werden und müssen die notwendigen Begriffe sehr sorgfältig eingeführt werden. Damit Schülerinnen und Schüler Mathematik als verstehbar erleben können, ist Sicherheit im Umgang mit den grundlegenden Fachbegriffen unabdingbar.

Zu diesen wichtigen Grundbegriffen gehört der Begriff *Gleichung*. Viele Situationen des Alltags, der Wirtschaft, der Technik und der Naturwissenschaften werden durch Gleichungen modelliert. Diese zu lösen gehört zu den zentralen Aufgaben von Mathematiker/inne/n. Auch im Lehrplan der AHS-Unterstufe (kundgemacht am 11. Mai 2000 im BGBl. II Nr. 133/2000) kommt das Wort *Gleichung* vor. Es gehört nicht zur Umgangssprache, daher ist es für Schüler/innen zunächst ein Fremdwort.

Im ersten Abschnitt dieses Beitrages wird zuerst an Hand von Beispielen überlegt, was wir vom Begriff „Gleichung“ erwarten, dann wird der Begriff (ohne Verwendung der Begriffe „Term“ und „Variable“, in Spezialfällen auch direkt aus der Umgangssprache) so definiert, dass er auf alle angeführten Beispiele zutrifft.

Im zweiten Abschnitt geht es um das Lösen von Gleichungen. Als allgemeine Lösungsstrategie wird das „erlaubte Umformen“ von (Systemen von) Gleichungen besprochen. Lineare Gleichungen haben oft unendlich viele Lösungen. Ein wesentlicher Teil des Lösens von linearen Gleichungen ist es dann festzulegen, wie die Menge aller Lösungen durch endlich viele Daten beschrieben werden kann.

Im dritten Abschnitt wird am Beispiel der „linearen Regression“ gezeigt, dass die Überlegungen der ersten zwei Abschnitte zum Verständnis von Resultaten scheinbar ganz anderer Gebiete beitragen können.

Dieser Beitrag ist die schriftliche Ausarbeitung meines Vortrages beim Lehrerfortbildungstag am 21. April 2006 in Wien.

Inhalt:

1. Was ist eine Gleichung?
   (Beispiele und Festlegung des Begriffs)

2. Wie löst man eine Gleichung?
   (Beschreibung der „Ausgabedaten“, „Erlaubtes Umformen“ als Lösungsstrategie)

3. Lineare Gleichungen mit ungenau bestimmten Daten
   (Lineare Regression)

2 Was ist eine Gleichung?

Bevor wir den Begriff Gleichung definieren, betrachten wir einige Beispiele, auf die dieser Begriff zutreffen soll:

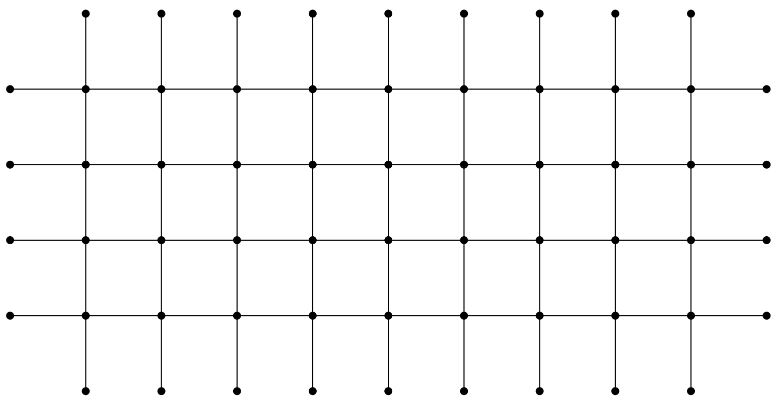
Beispiel 1: Fritz sagt zu Anna: Denke Dir eine Zahl, addiere dazu 2, multipliziere das Ergebnis mit 3 und ziehe dann 2 ab. Anna sagt: Jetzt habe ich 16. Fritz soll nun die Zahl, die sich Anna gedacht hat, berechnen. Bezeichnen wir diese Zahl mit z, dann ist 3(z+2)-2=16.
(„Eine lineare Gleichung in einer Unbekannten“).

Beispiel 2: Eine Bank verspricht, bei Einlage von 1000 Euro nach vier Jahren 1100 Euro auszuzahlen. Welchem (effektiven) Zinssatz entspricht das? Bezeichnen wir den Zinssatz mit p, dann ist

$$1100 = 1000(1 + \frac{p}{100})^4 \ .$$

Es soll eine positive reelle Zahl p mit dieser Eigenschaft berechnet werden.
(„Eine algebraische Gleichung in einer Unbekannten“).

Beispiel 3: Die Randpunkte eines rechteckigen Metallgitters mit quadratischen Maschen werden erhitzt.



Wir bezeichnen mit I die Menge der inneren Punkte und mit R die Menge der Randpunkte des Gitters. Für jeden Gitterpunkt p sei t_p die Temperatur in p. Vorgegeben sind die Temperaturen t_p, $p \in R$, die konstant gehalten werden. Aufgrund des Temperaturausgleichs gilt für jeden Punkt $p \in I$ nach einiger Zeit

$$t_p = \frac{1}{4}\,(\,t_{\ell(p)} + t_{r(p)} + t_{u(p)} + t_{o(p)}),$$

wobei $\ell(p)$,$r(p)$,$u(p)$,$o(p)$ der linke, rechte, untere bzw. obere Nachbar von p ist.
Berechne die Temperaturen t_p, $p \in I$!
(„Ein System von linearen Gleichungen in mehreren Unbekannten").

Beispiel 4: Es sei $g : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine stetige Funktion.
Gesucht sind alle zweimal stetig differenzierbaren Funktionen $y : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ so, dass die Summe der Funktion y und ihrer zweiten Ableitung gleich g ist ($y'' + y = g$).
(„Eine gewöhnliche Differentialgleichung").

Definition. Eine *Gleichung* ist eine *Aufgabe*:
Gegeben sind eine Funktion $f : D \longrightarrow W$ von einer Menge D (dem *Definitionsbereich*) in eine Menge W (dem *Wertebereich*) und ein Element w des Wertebereiches.
Gesucht sind alle Elemente d im Definitionsbereich, deren Funktionswert unter f gleich w ist ($f(d) = w$). Diese Elemente heißen *Lösungen* der Gleichung.

Als Kurzschreibweise für diese Aufgabe verwenden wir

$$f(x) = w \ .$$

Bei dieser Schreibweise wird angenommen, dass der Definitionsbereich von f bereits vereinbart wurde.

Sind D und W Vektorräume (zum Beispiel $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{R}^n$) und ist f linear oder affin, dann spricht man von einer *linearen Gleichung*. Sind D und W gleich $\mathbb{R}$ oder $\mathbb{C}$ und ist f eine Polynomfunktion, dann liegt eine *algebraische Gleichung* vor. Sind D und W geeignete Funktionenräume und ist f ein Differentialoperator, dann nennt man die Aufgabe eine *Differentialgleichung*.

Bemerkung. Nach dieser Definition ist $3 + 2 = 2 + 3$ keine Gleichung, sondern eine (wahre) Behauptung.
Sind $2x + 3$ und $x - 5$ Polynome, dann ist auch $2x + 3 = x - 5$ keine Gleichung, sondern eine (falsche) Behauptung.
Wird $2x + 3 = x - 5$ aber als Kurzschreibweise für eine Gleichung verwendet, dann ist damit gemeint: Finde eine Zahl z so, dass $2z + 3 = z - 5$ ist.

Wir zeigen nun, dass die in den Beispielen 1-4 beschriebenen Aufgaben Gleichungen sind. Weiters wird in den Beispielen 1-3 vorgeschlagen, wie der jeweilige Spezialfall von Gleichungen für sich allein in einfachen Worten definiert werden kann.

Beispiel 1: Diese „lineare Gleichung in einer Unbekannten" ist durch die affine Abbildung

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \longmapsto 3(x+2) - 2$$

gegeben. Gesucht ist eine Zahl z mit $f(z) = 16$.
Einfache Formulierung: Eine „lineare Gleichung in einer Unbekannten" ist die folgende Aufgabe: Gegeben sind Zahlen a, b, c, d, gesucht ist eine Zahl z mit der Eigenschaft $az + b = cz + d$.

Beispiel 2: Diese „algebraische (oder polynomiale) Gleichung in einer Unbekannten" ist durch die Polynomfunktion

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\ x \longmapsto 1000(1 + \frac{x}{100})^4 - 1100$$

gegeben. Gesucht ist eine Zahl z mit $f(z) = 0$.
Einfache Formulierung: Eine „algebraische Gleichung (vom Grad n) in einer Unbekannten" ist die folgende Aufgabe: Gegeben sind Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_n$, gesucht sind alle Zahlen z mit der Eigenschaft

$$c_0 + c_1 z + c_2 z^2 + \cdots + c_n z^n = 0\ .$$

Beispiel 3: Dieses „System von 36 linearen Gleichungen in 36 Unbekannten" ist durch die affine Abbildung

$$f : \mathbb{R}^I \longrightarrow \mathbb{R}^I$$

$$(x_p)_{p \in I} \longmapsto (x_p - \frac{1}{4}\,(\,x_{\ell(p)} + x_{r(p)} + x_{u(p)} + x_{o(p)}))_{p \in I}$$

gegeben. Gesucht ist eine Familie $(t_p)_{p\in I}$ mit $f((t_p)_{p\in I}) = 0 \in \mathbb{R}^I$.
Einfache Formulierung: „Eine lineare Gleichung in n Unbekannten" ist die folgende Aufgabe: Gegeben sind Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ und b. Gesucht sind alle n-Tupel $(z_1, \ldots, z_n)$ von Zahlen mit

$$a_1 z_1 + \ldots + a_n z_n = b\ .$$

Ein „System von m linearen Gleichungen in n Unbekannten" ist die folgende Aufgabe: Gegeben sind m lineare Gleichungen in n Unbekannten. Gesucht sind alle n-Tupel von Zahlen, die Lösungen von allen m linearen Gleichungen sind.
Falls die Begriffe Matrix, Zeile, Spalte und die Matrizenmultiplikation bekann sind, kann ein System linearer Gleichungen kurz so definiert werden: Ein „System von m linearen Gleichungen in n Unbekannten" ist die folgende Aufgabe: Gegeben sind eine Matrix M mit m Zeilen und n Spalten und eine Spalte s mit m Zeilen. Gesucht sind alle Spalten z mit n Zeilen so, dass $M \cdot z = s$ ist.

Beispiel 4: Diese „gewöhnliche Differentialgleichung“ ist durch den Differentialoperator

$$f : \mathcal{C}^2(\mathbb{R}) \longrightarrow \mathcal{C}^0(\mathbb{R}) \,,\; u \longmapsto u'' + u$$

und die stetige Funktion g gegeben. Gesucht sind alle 2-mal stetig differenzierbaren Funktionen y mit $f(y) = g$.
Die Abbildung f ist linear, daher ist diese Aufgabe eine lineare Differentialgleichung.

In [4], Seite 80, wird der Begriff Gleichung anders eingeführt. Dazu wird der Begriff „Term“ definiert: „Ein Term ist ein Rechenausdruck (eine Rechenanweisung), in dem Zahlen, Variable, Rechen- und Vorzeichen auftreten können.“ Dann: „Gleichungen bestehen also jeweils aus zwei Termen, die durch ein Gleichheitszeichen verbunden sind. “
In diesem Sinn wären auch die Aussagen $3 + 2 = 2 + 3$ und $3 + 1 = 4 + 1$ Gleichungen.

3 Wie löst man eine Gleichung?

Eine oft verwendete *Strategie zur Lösung von Aufgaben* ist: Wenn man eine Aufgabe nicht sofort lösen kann, ersetzt man diese Aufgabe durch eine einfachere, die aber dieselben Lösungen hat. Das wiederholt man solange, bis man bei einer Aufgabe landet, deren Lösungen man kennt. Diese Lösungen sind dann auch die Lösungen der ursprünglichen Aufgabe.
Zwei Gleichungen mit gleicher Lösungsmenge heißen *zueinander äquivalent*.

Auf Gleichungen angewendet, ergibt sich die Strategie des „erlaubten Umformens“: Gehe von einer Gleichung zu einer dazu äquivalenten einfacheren Gleichung über. Führe diesen Schritt kontrolliert so lange aus, bis die Gleichung „trivial“ wird.

Beispiele:

- Die Aufgabe

  $$3(x + 2) - 2 = 16$$

  („Finde eine Zahl z mit $3(z + 2) - 2 = 16$“) wird schrittweise in die dazu äquivalenten Gleichungen $3x + 4 = 16$, $3x = 12$ und $x = 4$ umgeformt. Die gesuchte Zahl ist also 4.

- Es seien p und q reelle Zahlen. Die Aufgabe

  $$x^2 + px + q = 0$$

(„Finde alle reellen Zahlen z mit $z^2 + pz + q = 0$“) wird in die dazu äquivalente Gleichung

$$(x + \frac{p}{2})^2 = (\frac{p}{2})^2 - q$$

umgeformt. Es ist also zuerst eine reelle Zahl h zu berechnen, deren Quadrat $(\frac{p}{2})^2 - q$ ist. Wenn sie existiert, hat auch $-h$ diese Eigenschaft. Die Lösungen der Aufgabe sind dann $-\frac{p}{2} + h$ und $-\frac{p}{2} - h$.

- Gauß-Algorithmus (oder Fang-Cheng-Algorithmus, 2. Jhd. v. Chr.): Ein durch eine Matrix M und eine Spalte s gegebenes System linearer Gleichungen

  $$M \cdot x = s$$

  („Finde alle Spalten z so, dass $M \cdot z = s$ ist“) wird durch zielgerichtetes elementares Umformen (Multiplikation von M und s mit geeigneten Elementarmatrizen) in eine dazu äquivalente Gleichung

  $$(P \cdot M) \cdot x = P \cdot s$$

  in Dreiecksform (oder sogar oberer Zeilenstufenform) umgeformt. Dabei ist P das Produkt der verwendeten Elementarmatrizen, also invertierbar. Daher sind die Lösungsmengen von $M \cdot x = s$ und $(P \cdot M) \cdot x = P \cdot s$ gleich. (Siehe [2], Kap. A2).

- Buchberger-Algorithmus (1965): Ein durch Polynome $f_1, \ldots, f_k$ in n Unbekannten gegebenes System algebraischer Gleichungen („Finde alle n-Tupel z so, dass $f_1(z) = f_2(z) = \ldots = f_k(z) = 0$ ist“) wird in eine „Gröbnerbasis“ umgeformt. Daraus kann zum Beispiel die Existenz von Lösungen oder die Endlichkeit der Lösungsmenge unmittelbar abgelesen werden. (Siehe [1], Chapter 2).

Hat eine Gleichung unendlich viele Lösungen, dann stellt sich die Frage, ob und wie die Lösungsmenge durch endlich viele Daten dargestellt werden kann. Die Darstellung soll so sein, dass man damit sofort jede gewünschte Anzahl von Lösungen anschreiben kann. In manchen Fällen ist das möglich.

Beispiel: Eine lineare Gleichung in 3 Unbekannten.
Gegeben sind Zahlen c_1, c_2, c_3 und b. Dabei nehmen wir an, dass c_1 nicht 0 ist. Gesucht sind alle Tripel von Zahlen (a_1, a_2, a_3) mit der Eigenschaft

$$c_1 \cdot a_1 + c_2 \cdot a_2 + c_3 \cdot a_3 = b\ .$$

In Kurzschreibweise:

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 = b\ .$$

Man sieht leicht, dass diese lineare Gleichung beliebig viele Lösungen hat. Dieselbe Aufgabe mit 0 statt b ist die *zugehörige homogene Gleichung*.

Die folgenden drei Beobachtungen sind einfach zu überprüfen, aber wichtig:

(1) Kennt man (irgend)eine Lösung der Gleichung

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 = b,$$

dann erhält man alle Lösungen, indem man zu dieser alle Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichung

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 = 0$$

addiert.

(2) Ist $z = (z_1, z_2, z_3)$ eine Lösung von

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 = 0$$

und ist t eine Zahl, dann ist auch $t \cdot z$ eine Lösung.

(3) Die Summe von zwei Lösungen von

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 = 0$$

ist wieder eine Lösung.

Man sieht sofort, dass $(-c_2, c_1, 0)$ und $(-c_3, 0, c_1)$ Lösungen von

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 = 0$$

sind und dass $(\frac{b}{c_1}, 0, 0)$ eine Lösung von

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 = b$$

ist. Aus (2) und (3) folgt, dass für jedes Zahlenpaar (s, t) auch das Tripel

$$s(-c_2, c_1, 0) + t(-c_3, 0, c_1)$$

eine Lösung von

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 = 0$$

ist. Ist umgekehrt (z_1, z_2, z_3) eine Lösung von

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 = 0,$$

dann ist

$$(z_1, z_2, z_3) = \frac{z_2}{c_1}(-c_2, c_1, 0) + \frac{z_3}{c_1}(-c_3, 0, c_1) \; .$$

Mit (1) ist daher die Lösungsmenge von

$$c_1 \cdot x_1 + c_2 \cdot x_2 + c_3 \cdot x_3 = b$$

gleich

$$\{(\frac{b}{c_1}, 0, 0) + s(-c_2, c_1, 0) + t(-c_3, 0, c_1) \,|\, s, t \in \mathbb{R}\} \; .$$

Allgemein folgt aus (2) und (3), dass die Lösungsmenge einer homogenen linearen Gleichung ein Vektorraum ist. Ein Vektorraum kann durch eine *Basis* gut beschrieben werden: alle Elemente des Vektorraums können in eindeutiger Weise als Linearkombination der Basisvektoren geschrieben werden.

„Eine lineare Gleichung lösen" bedeutet daher: Berechne irgendeine Lösung dieser Gleichung und eine Basis des Lösungsraums der entsprechenden homogenen Gleichung. Das gilt für das im Abschnitt 1 in Beispiel 3 angegebene System linearer Gleichungen ebenso wie für die lineare Differentialgleichung im Beispiel 4.

4 Lineare Gleichungen mit ungenau bestimmten Daten

Eine durch $f : D \longrightarrow W$ und $w \in W$ gegebene Gleichung hat genau dann eine Lösung, wenn w in $f(D) := \{f(d)|d \in D\}$, dem Bild von f, enthalten ist.
Beispiel: Das Bild von

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^2 \, , \; (s, t) \longrightarrow (s + t, 2s + 2t)$$

ist

$$\{(r, 2r) \,|\, r \in \mathbb{R}\} \, ,$$

also hat die durch f und $(1, 1)$ gegebene Gleichung keine Lösung.

Ist $W = \mathbb{R}^n$ und wird w durch Messungen bestimmt, kann es auf Grund von Messfehlern vorkommen, dass die durch f und w gegebene Gleichung keine Lösung hat, obwohl (zum Beispiel aus physikalischen Gründen) eine Lösung existieren müsste. Die Lösbarkeit der Gleichung kann dann „erzwungen" werden, indem man w durch ein Element w' im Bild von f ersetzt, das „möglichst nahe" bei w liegt. Dazu muss aber ein Abstandsbegriff auf W festgelegt werden.

Beispiel:
Wir nehmen an, dass die Ausdehnung eines Metallstabes linear von der Temperatur abhängt, also durch eine lineare Funktion

$$a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; z \longmapsto c \cdot z\,,$$

(mit $c \in \mathbb{R}$) beschrieben wird. Wir wollen diese Funktion a, oder dazu äquivalent, die Zahl $c = a(1)$ bestimmen. Die Ausdehnung des Stabes wurde bei Temperaturen $t_1, \dots, t_n$ gemessen, die Messwerte seien $w_1, \dots, w_n$. Das n-Tupel

$$w := (w_1, \dots, w_n) \in \mathbb{R}^n$$

ist also (durch Messungen) gegeben, gesucht ist eine Zahl $c \in \mathbb{R}$ mit

$$w_1 = ct_1, \dots, w_n = ct_n\,.$$

Wir wollen somit die durch

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}^n\,,\; c \longmapsto c \cdot t\,,$$

und $w \in \mathbb{R}^n$ gegebene lineare Gleichung lösen, dabei ist $t := (t_1, \dots, t_n)$.
Wenn w wegen der Messfehler nicht auf der Geraden

$$f(\mathbb{R}) = \{r \cdot t \,|\, r \in \mathbb{R}\}$$

liegt, hat diese Gleichung keine Lösung.

Wählen wir auf $\mathbb{R}^n$ den durch das Standardskalarprodukt

$$< (x_1, \dots, x_n), (y_1, \dots, y_n) > := \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

definierten Abstandsbegriff

$$||x - y||^2 := < x - y, x - y >\,,$$

dann ist das n-Tupel $w' \in f(\mathbb{R})$, das w am nächsten liegt, der Fußpunkt des Lotes von w auf $f(\mathbb{R})$:

$$w' = \frac{< w, t >}{< t, t >} t\,.$$

Die gesuchte Zahl c ist also

$$\frac{< w, t >}{< t, t >} = \frac{\sum_{i=1}^{n} w_i t_i}{\sum_{i=1}^{n} t_i^2}\,.$$

(Der Fußpunkt des Lotes eines Vektors u auf einem Untervektorraum V wird berechnet, indem man eine Orthonormalbasis $v_1, \ldots, v_k$ von V bestimmt. Dann ist

$$\sum_{i=1}^{k} < u, v_i > v_i$$

der Fußpunkt des Lotes von u auf V).

Der Abstand von w zum Fußpunkt w' ist

$$||w - w'|| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} (w_i - ct_i)^2}\,.$$

Da dieser minimal ist, ist die Summe der „Fehlerquadrate“ minimal. Das erklärt die „Methode der kleinsten Quadrate“ (siehe [3], Abschnitt 4).

Mehr Rechenaufwand ist erforderlich, wenn nicht $a(0) = 0$ verlangt wird, d.h. wenn a nur affin und nicht linear sein muss. Dann wird eine Funktion

$$a : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}\,,\; z \longmapsto c \cdot z + d$$

gesucht, die durch zwei Zahlen c, d bestimmt ist.
Wir müssen dazu die durch

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^n\,,\; (c, d) \longmapsto (c \cdot t_1 + d, \ldots, c \cdot t_n + d),$$

und $w \in \mathbb{R}^n$ gegebene lineare Gleichung lösen. Das Bild von f ist die von

$$f(0, 1) = (1, \ldots, 1) =: \mathbf{1} \text{ und } f(1, 0) = t$$

erzeugte Ebene in $\mathbb{R}^n$. Die mit dem Schmidt'schen Verfahren aus $(\mathbf{1}, t)$ konstruierte Orthonormalbasis dieser Ebene ist

$$(\frac{\sqrt{n}}{n}\mathbf{1}, \frac{1}{||v||}v)\,,$$

wobei $v := t - \frac{\langle \mathbf{1}, t\rangle}{n}\mathbf{1}$ ist.

Daher ist der Fußpunkt des Lotes von w auf diese Ebene gleich

$$w' := \frac{\langle \mathbf{1}, w\rangle}{n}\mathbf{1} + \frac{\langle v, w\rangle}{\langle v, v\rangle}v =$$

$$= \frac{\langle v, w\rangle}{\langle v, v\rangle}t + \left(\frac{\langle \mathbf{1}, w\rangle}{n} - \frac{\langle \mathbf{1}, t\rangle}{n}\frac{\langle v, w\rangle}{\langle v, v\rangle}\right)\mathbf{1}$$

Die gesuchten Zahlen sind also

$$c = \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle}$$

und

$$d = \frac{\langle \mathbf{1}, w \rangle}{n} - \frac{\langle \mathbf{1}, t \rangle}{n} \frac{\langle v, w \rangle}{\langle v, v \rangle} .$$

Der Graph der so bestimmten affinen Funktion a heißt *Regressionsgerade* der Punkte $(t_1, w_1), \ldots, (t_n, w_n)$.

Literatur

[1] Cox, D., Little, J., O'Shea, D.: Ideals, Varieties and Algorithms. Springer-Verlag, Berlin 1996

[2] Gabriel, P.: Matrizen, Geometrie, Lineare Algebra. Birkhäuser, Basel 1996

[3] Götz, S.: Von Pferden, Ziegen und unmöglichen Würfeln. *Didaktikhefte* **37**, 19-46, Österreichische Mathematische Gesellschaft, Wien 2005

[4] Reichel, H.-C., Litschauer, D., Groß, H.: Das ist Mathematik 3. öbv&hpt Verlag, Wien 2001